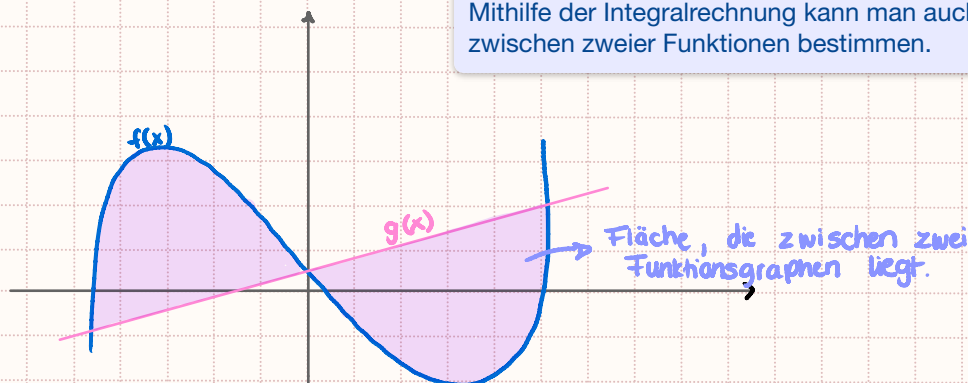


Fläche zwischen zweier Funktionen



CHEAT-SHEETS

Mithilfe der Integralrechnung kann man auch Flächeninhalte zwischen zweier Funktionen bestimmen.



Beispiel

Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der zwischen den beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \text{ und } g(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ geschlossen wird.}$$



1. Schritt: Schnittpunkte ermitteln.

⇒ die Schnittpunkte sind die Intervallsgrenzen, die wir betrachten müssen.

$$f(x) = g(x)$$

} Funktionen werden gleichgesetzt, um die Schnittpunkte zu ermitteln.

$$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x^2 \quad | -\frac{1}{2}x^2$$

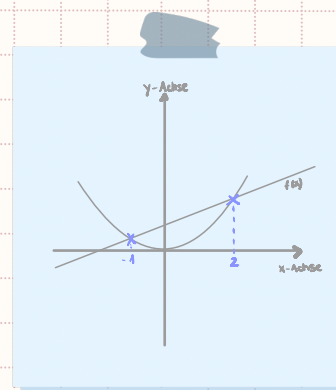
$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad | : (-\frac{1}{2})$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

} Intervall für die Fläche, die zwischen den Graphen liegt.



✓ **2. Schritt:** überprüfen, welche Funktion im jeweiligen Intervall oberhalb / unterhalb liegt.

⇒ Intervall $I = [-1; 2]$ } Die Fläche zwischen den beiden Funktionen liegt in diesem Intervall.

Wir setzen eine beliebige Zahl aus diesem Intervall in die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

Wir nehmen hier die Zahl 0:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{1}{2}(0) + 1 = 1 \\ g(0) = \frac{1}{2}(0)^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Daraus folgt, dass} \\ f(x) > g(x) \\ \text{im jeweiligen Intervall liegt.} \end{array}$$

✓ **3. Schritt:** Fläche mithilfe eines Integrals ausrechnen.

obere Grenze $\leftarrow 2$
untere Grenze $\leftarrow -1$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) - g(x) \, dx &= \int_{-1}^2 \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x^2 \, dx \\ &\quad \text{Da } f(x) > g(x) \\ &\quad \Rightarrow \text{Funktion, die oberhalb liegt, steht zuerst.} \\ &= \int_{-1}^2 -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \, dx \quad \rightarrow \text{umsortieren, damit es übersichtlicher aussieht.} \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x \right]_{-1}^2 \quad \rightarrow \text{Stammfunktion bilden} \\ &= F(2) - F(-1) \quad \rightarrow \text{Hauptsatz der Integralrechnung} \\ &= 2,25 \text{ [FE]} \quad \rightarrow \text{Ergebnis} \end{aligned}$$

Fertig.